28/3/16

(Δυϊκό πρόβλημα)

(Π) πρωτεύον

$\max c' x$

$A x \le b$

$x \ge 0$

(Δ) $\min b' w$

$A^T w \ge c$

$w \ge 0$

	Προϊόν			
Πρώτη ύλη	θρανίο	τραπέζι	καρέκλα	Διαθεσιμότητα
Ξυλεία (m^3)	8	6	1	48
Κατασκευή (ώρες)	2	1.5	0.5	8
Φινίρισμα (ώρες)	4	2	1.5	20
Τιμή πώλησης	60	30	20	

x_1 θρανίο, x_2 τραπέζι, x_3 καρέκλα.

$\max\ 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

$w_1 \quad 8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48$ (ξυλεία)

(Π) $w_2 \quad 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \le 8$ (κατασκευή)

$w_3 \quad 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \le 20$ (φινίρισμα)

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

$$\min\ 48\omega_1 + 8\omega_2 + 20\omega_3$$

(Δ)

$$8\omega_1 + 2\omega_2 + 4\omega_3 \geq 60$$
$$6\omega_1 + 1{,}5\omega_2 + 2\omega_3 \geq 30$$
$$\omega_1 + 0{,}5\omega_2 + 1{,}5\omega_3 \geq 20$$
$$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \geq 0$$

→ λογικά ώσπου θα αλλάσσαμε για να ασχοληθεί στη ξυλεία, άρα για να την πουλήσουμε πρέπει να είναι μεγαλύτερο από αυτό που θα πουλούσαμε, επειδή το 60).

μακαρόνια κοτόπουλο φασόλια γάλα

• $\min\ 50x_1 + 90x_2 + 50x_3 + 150x_4$ (όλα σε 100γρ.)

(Π)

ω_1 $\quad 95000x_1 + 29300x_2 + 3000x_3 + 4000x_4 \geq 63000$ (θερμίδες)

ω_2 $\quad 1{,}1x_1 + 1{,}8x_2 + 2{,}2x_3 + 1{,}2x_4 \geq 10$ (σίδηρος)

ω_3 $\quad 1{,}4x_1 + 5{,}4x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}6x_4 \geq 15$ (Αμινοξύ A)

ω_4 $\quad 0{,}18x_1 + 0{,}06x_2 + 0{,}07x_3 + 0{,}15x_4 \geq 1$ (Αμινοξύ B)

ω_5 $\quad 2{,}8x_3 + 3x_4 \geq 50$ (βιταμίνη C)

$x_i \geq 0$

(Δ) $\max\ 63000\omega_1 + 10\omega_2 + 15\omega_3 + \omega_4 + 50\omega_5$

$$95000\omega_1 + 1{,}1\omega_2 + 1{,}4\omega_3 + 0{,}18\omega_4 \leq 50$$
$$29300\omega_1 + 1{,}8\omega_2 + 5{,}4\omega_3 + 0{,}06\omega_4 \leq 90$$
$$3000\omega_1 + 2{,}2\omega_2 + 0{,}5\omega_3 + 0{,}07\omega_4 + 2{,}8\omega_5 \leq 50$$
$$4000\omega_1 + 1{,}2\omega_2 + 0{,}6\omega_3 + 0{,}15\omega_4 + 3\omega_5 \leq 150$$
$$\omega_i \geq 0$$

(Αν έχω λύση πρωτεύων, μπορώ να βρω δυϊκούς)

• Αν $\underline{x}$ μια εφικτή λύση του (Π) και $\underline{\omega}$ μια εφικτή λύση του (Δ) τότε $\underline{c}'\underline{x} \leq \underline{b}'\underline{\omega}$ (1) (Ασθενής Δυϊκότητα).

$\underline{x}$ λύση του (Π) (άρα ικανοποιεί τους περιορισμούς $A\underline{x} \leq \underline{b}$, $\underline{\omega} \geq 0$)

άρα $\underline{\omega}' A \underline{x} \leq \underline{\omega}' \underline{b} = \underline{b}' \underline{\omega}$.

$\underline{\omega}$ λύση του (Δ) $\quad A^T\underline{\omega} \geq \underline{c}$ $\quad \underline{x}' A^T \underline{\omega} \geq \underline{x}' \underline{c} = \underline{c}' \underline{x}$

$\underline{x} \geq 0$ $\quad \underline{\omega}' A \underline{x} \geq \underline{c}' \underline{x}$

*(Αν στη (Δ) έχω ισότητα τότε άριστη λύση)

• Αν $\underline{x}$ μια εφικτή λύση του (Π) κ' $\underline{ω}$ μια εφικτή λύση του (Δ) έτσι ώστε $z = \underline{c}'\underline{x} = \underline{b}'\underline{ω} = u$ τότε $\underline{x}$ και $\underline{ω}$ είναι άριστες λύσεις του (Π) και (Δ) αντίστοιχα.

Έστω $\underline{x}, \underline{ω}$ τυχαίες λύσεις του (Π) και (Δ) αντίστοιχα.

$\underline{c}'\underline{x} \le \underline{b}'\underline{ω} = \underline{c}'\bar{x}$ άρα $\bar{x}$ άριστη λύση του (Π)

$\underline{b}'\underline{ω} > \underline{c}'\underline{x} = \underline{b}'\bar{ω}$ άρα $\bar{ω}$ άριστη λύση του (Δ)

$\bar{u} = b_1\bar{ω}_1 + b_2\bar{ω}_2 + \dots + b_m\bar{ω}_m = \bar{z}$

όπως επηρεάζεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στις δυϊκές μεταβλητές.

• Αν το (Π) είναι μη φραγμένο τότε το (Δ) δεν έχει εφικτή λύση

Ας πάρουμε f_x το σύνολο των εφικτών λύσεων για το (Π)

$f_ω$ —״— —״— —״— (Δ)

(μη φραγμένο → η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης τείνει στο άπειρο, $\max \underline{c}'\underline{x}$ $x \in f_x \to \infty$)

Έστω ότι (Δ) έχει εφικτή λύση $\underline{ω}$ $c'\underline{x} \le \underline{b}'\underline{ω}$ όπου έχουμε άτοπο καθώς $c'\underline{x} \to \infty$, το άλλο πεπερασμένο άρα δεν μπορεί να ισχύει.

• Αν το (Δ) δεν έχει εφικτές λύσεις τότε το (Π) είτε δεν έχει εφικτές λύσεις είτε είναι μη φραγμένο

(Θεώρημα Δυϊσμού) Αν το (Π) έχει άριστη λύση τότε και το (Δ) έχει άριστη λύση και μάλιστα οι αντίστοιχες τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων τους είναι ίσες.

(Π) $\max \underline{c}'\underline{x}$, $A\underline{x} = b$, $\underline{x} \geq 0$

$\max \underline{c}_I' \underline{x}_I + \underline{c}_\Pi' \underline{x}_\Pi$

$(N, I) \begin{pmatrix} \underline{x}_I \\ \underline{x}_\Pi \end{pmatrix} = \underline{b}$, $\underline{x}_I, \underline{x}_\Pi \geq 0$

$\underline{x}_\Pi$ βασικές μεταβλητές

$\underline{x}_I$ μη βασικές μεταβλητές

(Δ) $\min \underline{b}'\underline{w}$

$\begin{pmatrix} N' \\ I \end{pmatrix} \underline{w} \geq \begin{pmatrix} \underline{c}_I \\ \underline{c}_\Pi \end{pmatrix}$

$w_i \in \mathbb{R}$

B βάση που αντιστοιχεί στην άριστη λύση του (Π)

$\underline{c}_B$ (διάνυσμα συντελεστών)

$\underline{w}' = \underline{c}_B' B^{-1}$ (Δ) (Θ.Δ.Ο)

(i) $\underline{w}$ εφικτή λύση του (Δ)

(ii) $\min \underline{b}'\underline{w} = \max \underline{c}'\underline{x}$

		$\underline{x}_I$	$\underline{x}_\Pi$
$\underline{c}_\Pi$	b	N	I
	$\underline{c}_\Pi' b$	$\underline{c}_\Pi' N - \underline{c}_I'$	$0'$

αρχικό tableaux

$\underline{c}_B$	$B^{-1}b$	$B^{-1}N$	$B^{-1}I$
	$\underline{c}_B' B^{-1} b$	$\underline{c}_B' B^{-1} N - \underline{c}_I'$	$\underline{c}_B' B^{-1} - \underline{c}_\Pi'$

τελικό tableaux

$c_B' B^{-1} N - c_J' \geq 0'$ } για να έχω λύση

$c_B' B^{-1} - c_J' \geq 0$

$\underline{w}' = c_B' B^{-1}$

$w'N - c_J' \geq 0'$

$N^T w \geq c_J$

$\underline{w} \geq c_\pi$

$\underline{u} = \underline{b}' w = w' \underline{b} = c_B' B^{-1} \underline{b} = z$

• $\max(x_1 + x_2 + x_3)$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2$

$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2$

$x_i \geq 0$

στη συνέχεια δίνουμε τις άριστες λύσεις και των δύο (πρωτεύοντος και δυϊκού)

$\min 2w_1 + 2w_2$

$2w_1 + 4w_2 \geq 1$

$w_1 + 2w_2 \geq 1$

$2w_1 + w_2 \geq 1$

$w_{1,2} \geq 0$

	B	c_B	B	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ
1ο	P_4	0	2	2	1	2	1	0	2/2
	P_5	0	2	$\boxed{4}$	2	1	0	1	2/4
			0	-1	-1	-1	0	0	

3ο	P_3	1	2/3	0	0	1	2/3	-1/3
	P_2	1	2/3	2	1	0	-1/3	2/3
			4/3	1	0	0	1/3	1/3

αναγνωρίζω την λύση του δυϊκού κάτω από το μοναδιαίο του τελευταίου ταμπλώ

περιθώριες, ώστε να έχω ισότητα στο δυϊκό

$w_1 = z_4 - c_4 + c_4 = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$

$w_2 = (z_5 - c_5) + c_5 = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$

- $\max\ 15x_1 + 10x_2$

$$x_2 \leq 50$$
$$-\frac{3}{2}x_1 + x_2 \leq -20$$
$$x_1 - x_2 \geq 0$$

$\max\ 15x_1 + 10x_2$

$$x_2 + x_3 = 50$$
$$x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_4 = \frac{40}{3}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

			15	10	0	0
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4
P_3	0	50	0	1	1	0
P_1	15	$\frac{40}{3}$	1	$-2/3$	0	$-2/3$
	0	$\frac{400}{3}$	0	-20	0	-10

P_2	10	50	0	1	1	0
P_1	15	$140/3$	1	0	$2/3$	$-2/3$
	0	1200	0	0	20	-10

μη φραγμένο

(Δ) $\min\ 50w_1 - 20w_2$

$$-\frac{3}{2}w_2 \geq 15 \quad \leftarrow \text{αναμένω ότι (Δ) αδύνατο !!!}$$
$$w_1 + w_2 \geq 10$$
$$w_{1,2} \geq 0$$

- $\min 2x_1 + 3x_2$

$$0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 \le 4$$
$$x_1 + 3x_2 \ge 36$$
$$x_1 + x_2 = 10$$

$-\max -2x_1 - 3x_2$

$$0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 3x_2 \quad - x_4 = 36$$
$$x_1 + x_2 \quad = 10$$
$$x_i \ge 0$$

$-\max -2x_1 - 3x_2 + Mx_5 - Mx_6$

$$0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 + x_3 \quad = 4$$
$$x_1 + 3x_2 \quad - x_4 + x_5 = 36$$
$$x_1 + x_2 \quad + x_6 = 10$$
$$x_i \ge 0$$

			-2	-3	0	0	-M	-M	
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ
P_3	0	4	0,5	0,25	1	0	0	0	16
P_5	-M	36	1	3	0	-1	1	0	12
P_6	-M	10	1	1	0	0	0	1	10
		0 -46M	2 -2M	3 -4M	0	0	0	0	

P_3	0	1,5	0,25	0	1	0	0
P_5	-4	6	-2	0	0	-1	1
P_2	-3	10	1	1	0	0	0
		-30 -6M	1 -11M	0	0	M	0

πρόβλημα αδύνατο

(1) $\max\ 4w_1 + 36w_2 + 10w_3$ ¿? [illegible]

$$0{,}5w_1 + w_2 + w_3 \leq 2$$
$$0{,}25w_1 + 3w_2 + w_3 \leq 3$$
$$w_1 \leq 0,\ w_2 \geq 0,\ w_3 \in \mathbb{R}$$

• $\min\ (x_1 - 2x_2) + 3x_3$

$$x_2 - \frac{1}{2}x_3 \leq 1/2$$
$$-x_2 - 2x_4 \geq -8$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -10$$
$$x_i \geq 0$$

$-\max\ (-x_1 + 2x_2) - 3x_3$

$$x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_5 = 1/2$$
$$x_2 + 2x_4 + x_6 = 8$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$$
$$x_i \geq 0$$

			-1	2	-3	0	0	0
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_5	0	1/2	0	1	-1/2	0	1	0
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0
		-10	0	-1	2	-2	0	0

P_5	0	1/2	0	1	-1/2	0	1	0
P_4	0	4	0	1/2	0	1	0	1/2
P_1	-1	2	1	-2	1	0	0	-1
		-2	0	0	2	0	0	1

(Δ) $\max \frac{1}{2}w_1 - 8w_2 - 10w_3$

$$-w_3 \leq 1$$
$$w_1 - w_2 + w_3 \leq -2$$
$$-\frac{1}{2}w_1 \quad - w_3 \leq 3$$
$$-2w_2 - 2w_3 \leq 0$$
$$w_1 \leq 0,\ w_2 \geq 0,\ w_3 \in \mathbb{R}$$

$$w_1 = (z_5 - c_5) + c_5 = 0$$
$$w_2 = (z_6 - c_6) + c_6 = 1$$
$$w_3 = (z_1 - c_1) + c_1 = -1$$

P_5	0	1/2	0	1	-1/2	0	1	0
P_4	0	4	0	1/2	0	1	0	1/2
P_1	-1	2	1	-2	1	0	0	-1
		-2	0	0	2	0	0	1

P_2	2	1/2	0	1	-1/2	0	1	0
P_4	0	15/4	0	0	1/4	1	-1/2	1/3
P_1	-1	3	1	0	0	0	2	-1
		-2	0	0	2	0	0	1

• max $3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ (ΒιΒλιο)

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15$$
$$2x_2 - x_3 \geq 5$$
$$2x_1 + x_2 - 5x_3 = 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(Δ) $\min 15w_1 + 5w_2 + 10w_3$

$w_1 + 2w_3 \geq 3$

$3w_1 + 2w_2 + w_3 \geq 2$

$2w_1 - w_2 - 5w_3 \geq 5$

$w_1 \geq 0,\ w_2 \leq 0,\ w_3 \in \mathbb{R}$

$(w_1, w_2, w_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 0 \geq 0$

$w_i = (c_B B^{-1})_i$

$z_j - c_j = c_B B^{-1} P_j - c_j = w' P_j - c_j$

από τον πρόσθετα

$(w_1, w_2, w_3)\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} - 0 \geq 0$

$-w_2 \geq 0 \Rightarrow w_2 \leq 0$

$w_1 = z_5 - c_5 + c_5 = 0$

$w_2 = z_6 - c_6 + c_6 = 1$

$w_3 = (z_1 - c_1) + c_1 = -1$

- - - - - - -

$(w_1, w_2, w_3)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - (-M) \geq 0$

$w_3 + M \geq 0$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/23 & -5/23 & -2/23 \\ 2/23 & 9/23 & -1/23 \\ 9/23 & -17/23 & 7/23 \end{pmatrix}$$

(Π) $\min(3x_1 + 2x_2 + x_3)$ (Β1β2λ10)

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$

$x_2 - x_3 \leq 2$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

(Δ) $\max 4w_1 + 2w_2 + 6w_3$

$w_1 + w_2 \leq 3$

$w_1 + w_2 + w_3 \leq 2$

$w_1 - w_2 + 2w_3 \leq 1$

$w_1 \geq 0,\ w_2 \leq 0,\ w_3 \in \mathbb{R}$

$w_1 = z_6 - c_6 + c_6 = 3$

$w_2 = z_5 - c_5 + c_5 = 0$

$w_3 = z_7 - c_7 + c_7 = -1$

$z_4 - c_4 = (w_1, w_2, w_3)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \leq 0$

$w_1 \geq 0$

$z_5 - c_5 = (w_1, w_2, w_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \leq 0 \Rightarrow w_2 \leq 0$

$z_7 - c_7 = (w_1, w_2, w_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - M \leq 0 \Rightarrow w_3 \in \mathbb{R}$

$z_j - c_j = \underline{w}' \underline{P}_j - c_j = (w_1, \ldots, w_m)\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} - c_j =$

$= \underbrace{a_{1j} m_1 + \ldots + a_{mj} a_m - c_j}$

Χρησιμοποιημένοι πόροι
ανά μονάδα προϊόντος.